Муниципальное автономное образовательное учреждение

«Средняя общеобразовательная школа № 9»

Методические рекомендации обучающимся

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НА ЦЕЛЫЕ ЧИСЛА

(задание 19 ЕГЭ по математике профильного уровня)

Дрозд Лариса Витальевна,
учитель математики

г. Усть-Илимск
2023-2024 уч.год

Пояснительная записка

В аналитических отчетах о результатах ЕГЭ по математике ФИПИ отмечается, что задание 19 высокого уровня сложности в КИМ составляется таким образом, «что, с одной стороны, тематически оно доступно даже ученикам основной школы, а с другой стороны, для его решения требовались не столько формальная математическая образованность (знание формул, терминов, правил, готовых алгоритмов), сколько общая математическая культура, то есть сформированная привычка самостоятельно ориентироваться в математической ситуации, строить и исследовать математические модели». Другими словами, задание 19 направленно на проверку у выпускников умения строить и исследовать простейшие математические модели и носит оценочно-экспертный характер.

При составлении этого задания разработчиками КИМ использовался подход, при котором оно разбивалось на систему усложняющихся вопросов, т.е. содержало 2-3 пункта. Тем самым в формулировке задания участникам ЕГЭ предлагается определенный путь, по которому можно шаг за шагом продвигаться в решении к наиболее сложного задания КИМ. Это позволяет выпускникам, не увидевшим полный путь решения всей задачи, получить по крайней мере 1 балл.

Стоит отметить момент, возникающий при решении подобных заданий. Если ставится вопрос «Можно ли выполнить некоторое условие?», то в случае ответа «да» достаточно привести пример, а в случае ответа «нет» необходимо привести доказательство.

В данном пособии рассмотрены способы решения некоторых заданий №19 из ЕГЭ разных лет в помощь обучающимся и их наставникам.

Примеры заданий 19 ЕГЭ по математике профильного уровня с решениями

Пример 1. (Пробный ЕГЭ-2012 г.)

На доске написано число 7. Раз в минуту Витя подписывает на доску одно число: либо в двое больше какого-то из чисел на доске, либо равное сумме каких-то двух чисел, написанных на доске (таким образом, через одну минуту на доске появится второе число, через две минуты- третье и т.д.).

а) может ли в какой-то момент на доске оказаться число 2012?

б) может ли в какой-то момент сумма всех чисел равняться 63?

в) через какое наименьшее время на доске может появиться число 784?

Решение: а) Заметим, что каждое число на доске будет делиться на 7. Действительно, в первую минуту Витя запишет удвоенное число т.е. 14. Первое число 7 и второе число 14 делятся на 7, поэтому при удвоении или сложении чисел будут получаться числа, который делятся на 7. Так как число 2012 не делится на 7, то оно не может появиться на доске.

б) Да, может. Например, 7, 14, 14, 14, 14 или другой набор чисел 7, 14, 14, 28 (в условии не сказано, что одно число нельзя удваивать несколько раз),

в) Так как все числа делятся на 7, то упростим задачу, разделив все числа с первого числа 7 до последнего числа 784. Количество операций не изменится, поэтому достаточно, начиная с 1, получить число 112 за наименьшее количество операций.

Покажем, что за 7 минут число 112 получить невозможно. Если использовать одну операцию удвоения, то можно получить наибольшее число, и за 6 минут из выписанных чисел 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 получится наибольшее число 64. На седьмой минуте ни одна из операций (удвоения или сложения) не приводит к числу 112. Допустим, что в течение первых 7 минут Витя использовал одну операцию сложения (на любой минуте). Тогда наибольшее число, которое можно получить, равно 64+32=96, что меньше 112. Приведем пример, как получить число 112 за 8 минут: 1, 2, 4, 16 ,32, 64, 96, 112 (96+16=112).

Ответ: а) нет; б) да; в) 8 минут

Пример 2. (ЕГЭ-2015)

На доске написано число 2015 и еще несколько (не менее двух) натуральных чисел, не превосходящих 5000. Написанные на доске числа различны. Сумма любых двух из написанных чисел делится на какое-нибудь из остальных.

а) Может ли на доске быть записано число 1009?

б) Может ли на доске быть записано ровно пять чисел?

в) Какое наименьшее количество чисел может быть написано на доске?

Решение: а) Рассмотрим 1009 чисел: все числа нечетные не превосходящие 2015, и число 2. Сумма любых двух из них делится на 1, сумма любых нечетных чисел - на 2, а сумма 1+2 делится на 3. Таким образом, такие числа удовлетворяют условию задачи.

б) Пять чисел: 403, 806=2·403, 1209=3·403, 1612 =4 ·403 и 2015=5 ·403 удовлетворяют условию задачи.

в) Четыре числа: 403, 806 =2 · 403, 1209 =3 · 403 и 2015 =5 · 403 удовлетворяют условию задачи.

Покажем, что меньшее количество чисел не удовлетворяет условию задачи. Пусть написано всего три числа $a < b < c$. Тогда $a + b < 2c$ и $a + b$ кратно c. Так как при этом $a + c = 2a + b$ делится на b, получаем, что $2a$ делится на b, что возможно лишь при $2a = b$. Таким образом, написанные три числа – это а, 2а, 3а. Но лишь 2015 не делится на 2, на 3, значит а=2015 и 3а=6045 > 5000, что противоречит условию задачи.

Ответ: а) да; б) да; в) 4.

Пример 3. (СтатГрад, 2014)

По кругу в некотором порядке по одному разу написаны числа от 9 до 18. Для каждой из десяти пар соседних чисел нашли их наибольший общий делитель.

а) Могло ли получится так, что все наибольшие общие делители равны 1?

б) Могло ли получится так, что все наибольшие общие делители попарно различны?

в) Какое наибольшее количество попарно различных наибольших общих делителей могло при этом получится?

Решение: а) Да, могло. Например, эти числа записаны в порядке 9, 16, 15, 14, 13, 12, 11, 18, 17, 10.

б) Всего по кругу записано 10 чисел. Для каждой пары соседних чисел ищем наибольший общий делитель, следовательно, получим 10 наибольших общих делителей. Если они все попарно различны, то хотя бы один из них не меньше 10. Но такого быть не может, так как из данных чисел наибольший общий делитель из возможных наибольших общих делителей есть НОД (18,9) = 9.

в) Числа 11, 13 и 17 являются простыми, наибольшие общие делители этих чисел со всеми остальными числами равняются 1. Каждое из двух чисел имеет двух соседей, следовательно, хотя бы два числа из этих трех будут иметь, по крайней мере, одного соседа, отличного от этих тех чисел. Таким образом, хотя бы четыре из всех наибольших общих делителей будут равняться 1, то есть совпадать. Следовательно, не может быть больше, чем семь попарно различных наибольших общих делителей, поскольку всего их десять, причем четыре совпадают. Для расстановки 9, 18, 12, 16, 14, 13, 11, 17, 10, 15 получается ровно семь попарно различных наибольших общий делителей.

Ответ: а) да; б) нет; в) 7.

Пример 4. (ЕГЭ-2017)

С натуральным числом проводят следующую операцию: между каждыми двумя соседними цифрами записывают сумму этих цифр (например, из числа 1923 получается число 110 911 253).

а) Приведите пример числа, из которого получается 2 108 124 117.

б) Может ли из какого-либо числа получится число 37 494 128?

в) Какое наибольшее число, кратное 11, может получится из трехзначного числа?

Решение: а) Число 2 108 124 117 получается из числа 2847.

б) Нет. Заметим, что для получения числа 37 494 128 исходное число должно начинаться цифрой 3, а заканчиваться цифрой 8. Учитывая, что сумма двух цифр не превосходит 18, получаем, что между двумя цифрами исходного числа может стоять либо цифра, либо двузначное число. Так как 3 + 9 < 74, а 3 + 4 = 7, то второй цифрой исходного числа должна быть 4. Далее видим, что 4 + 4 ≠ 9 и 4 + 1 ≠ 94, поэтому данное в задаче число не могло получится.

в) Пусть исходное число есть $\overline{abc}$ = 100a + 10b + c, где a, b, c – цифры. Наибольшее возможное количество разрядов в получившемся числе n может быть7. Число n будет семизначным, только если a + b ≥ 10 и b + c ≥ 10, а в остальных случаях оно будет меньше 1000000. Если a + b ≥ 10 и b + c ≥ 10,
то полученное число n = a $\cdot 10^6$ + 1$\cdot$ 10^5 + (a + b - 10)$\cdot$ 10^4+ b$\cdot 10^3$+ 1$\cdot 10^2$+ (a + b - c)$\cdot$10 + c.

Число n делится на 11, если знакочередующаяся сумма его цифр делится на 11. В данном случае эта сумма равна a – 1 + (a + b - 10) – b + 1 – (b + c - 10) + c = 2a – b.
При a = 9 получившееся число будет больше, чем при любом другом a, вне зависимости от b и c. В этом случае 2a – b делится на 11 только при b = 7 и любом c. При a = 9 и b = 7 максимальное число получается при c = 9. Таким образом, максимальное число получится из числа 979 и оно равно 9 167 169.

Ответ: а) 2847; б) нет; в) 9 167 169

Пример 5. (ЕГЭ-2014)

а) Можно ли представить число 2014 в виде суммы двух различных натуральных чисел с одинаковой суммой цифр?

б) Можно ли представить число 199 в виде суммы двух различных натуральных чисел с одинаковой суммой цифр?

в) Найти наименьшее натуральное число, которое можно подставить в виде суммы пяти различных натуральных чисел с одинаковой суммой цифр.

Решение: а) Можно. Например, числа 2006 и 8 удовлетворяют условию задачи 2006+8=2014.

б) Предположим, что число 199 можно представить указанным в условии задачи способом. Тогда одно из них должно быть трехзначным, поскольку 99 + 98 = 197 < 199. Пусть это число имеет одну сотню, b десятков и c единиц, то есть $\overline{1}$bc = 100 + 10$\cdot$b + c. Тогда другое число равно (100 + 10$\cdot$9 + 9) – (100$\cdot$a + 10$\cdot$b + c) = 10$\cdot$(9 - b) + (9 - c). Сумма цифр этих чисел равна 1 + b + c и (9 - b) + (9 - c) = 18 – (b + c) соответственно.
Числа 1 + b + c и 18 – (b + c) имеют разную четность, поэтому не могут быть одинаковыми.

в) Наименьшее натуральное число, которое можно представить в виде суммы пяти различных натуральных чисел с одинаковой суммой цифр, равно сумме пяти наименьших чисел с этой суммой цифр.

Для сумм, равных 1, 2, 3 и 4, имеем соответственно:

$$1 + 10 + 100 + 1\,000 + 10\,000 = 111111,$$

$$2 + 11 + 20 + 101 + 110 = 244,$$

$$3 + 12 + 21 + 30 + 102 = 168,$$

$$4 + 13 + 22 + 31 + 40 = 110.$$

Пусть теперь сумма цифр равна $a \geq 5$. Наименьшее из этих чисел также равно a. Воспользуемся тем фактом, что натуральные числа, имеющие одинаковую сумму цифр, дают, дают одинаковые остатки при делении на 9, поэтому они имеет вид $a + 9k$, где $k = 0, 1, 2...$ Следовательно, их сумма не меньше, чем

$a + (a + 9) + (a + 18) + (a + 27) + (a + 36) = 5a + 90 \geq 115$. Значит, искомое число равно 110.

Ответ: а) да; б) нет; в) 110.

Пример 6. (ЕГЭ-2013)

Имеются каменные глыбы: 5 штук по 800 кг, 60 штук по 1000 кг и 60 штук по 1500кг (раскалывать глыбы нельзя).

а) Можно ли увезти все эти глыбы одновременно на 60 грузовиках, грузоподъемностью 5 тонн каждый, предполагая, что в грузовик выбранные глыбы поместятся?

б) Можно ли увезти все эти глыбы одновременно на 38 грузовиках, грузоподъемностью 5 тонн каждый, предполагая, что в грузовик выбранные глыбы поместятся?

в) Какое наименьшее количество грузовиков, грузоподъемностью 5 тонн каждый, понадобится, чтобы перевезти все эти глыбы одновременно, предполагая, что в грузовик выбранные глыбы поместятся?

Решение: а) масса любых трех таких глыб не превосходит 5 тонн. Значит, в 60 грузовиков можно погрузить 180 таких глыб. Всего 170 глыб, поэтому их можно увезти на 60 грузовиках.

б) Суммарная масса глыб равна $50 \cdot 800 + 60 \cdot 1000 + 60 \cdot 1500 = 190\,000$ (кг), то есть с точностью совпадает с грузоподъемностью 38 грузовиков ($38 \cdot 5\,000 = 190\,000$ кг), каждый грузовик должен быть загружен полностью (по массе груза). Если в каком-то грузовике есть глыба массой 800 кг, то единственная возможность загрузить такой грузовик полностью – это добавить еще 4 такие глыбы и одну глыбу массой 1000 кг. Следовательно, грузовиков, загруженных таким образом понадобиться 10 штук. Поскольку осталось 60 глыб массой 1500 кг каждая, и 28 грузовиков, то в одном из грузовиков должны быть хотя бы 3 такие глыбы. Но в грузовик, в который загружено 3 глыбы массой 1500 кг каждая, ничего больше погрузить не получится. Значит, на 38 грузовиках увезти эти глыбы нельзя.

в) В предыдущем пункте было показано, что 38 грузовиков не хватит. Покажем, что 39 грузовиков достаточно. Приведем пример загрузки: в 10 грузовиков грузится 5 глыб массой 800 кг каждая и глыба массой 1000 кг; в 25 грузовиков грузятся по 2 глыбы массой 1000 кг каждая и по 2 глыбы массой 1500 кг каждая; в 3 грузовика грузится по 3 глыбы массой 1500 кг каждая и в один грузовик глыба массой 1500 кг. В этом случае все глыбы будут загружены в 39 грузовиков. Значит, наименьшее количество грузовиков – это 39.

Ответ: а) да; б) нет; в) 39.

Пример 7: (ЕГЭ-2015)

В одном из заданий на конкурсе бухгалтеров требуется выдать премии сотрудникам некоторого отдела на сумму 800 000 рублей (размер премии каждого сотрудника – целое число кратное 1000). Бухгалтеру дают задание распределить премии, и он должен их выдать без сдачи и размена, имея 250 купюр по 1000 рублей и 110 купюр по 5000 рублей.

а) Удастся ли выполнить задание, если в отделе 40 сотрудников и все должны получить поровну?

б) Удастся ли выполнить задание, если ведущему специалисту надо выдать 80 000 рублей, а остальным делить поровну на 80 сотрудников?

в) При каком наибольшем количестве сотрудников в отделе задание удастся выполнить при любом распределении размеров премии?

Решение: а) Так ка при таком условии каждый сотрудник должен получить по 20 000 рублей, премии можно выдать 27 сотрудникам по 4 пятитысячных купюры, одному – две пятитысячные и 10 тысячных купюр, оставшимся 12 сотрудникам по 20 тысячных купюр.

б) Так как (800 000 – 80 000): 80 = 9000, то каждый сотрудник должен получить по 9000 рублей. Следовательно, каждому сотруднику нужно будет выдать не менее 4 тысячных купюр, то есть потребуется не менее 320 тысячных купюр. Значит, без сдачи и размена выдать премии всем сотрудникам не удастся.

в) Если сотрудников 64 или больше, разделим премии так: 63 человека должны получить по 4 тысячи, один – все остальное, оставшиеся сотрудники – ничего. В этом случае выдать премии нельзя по тем же причинам, что и пункте б). Если же сотрудников не больше 63, то 62 сотрудникам будем выдавать премии, используя не более 4 тысячных купюр, пока не кончатся пятитысячные купюры. Если пятитысячные купюры закончатся, то оставшиеся премии выдать точно удастся. Если же нет, то все премии, кроме одной, будут выданы. Последний сотрудник просто заберет все оставшиеся деньги.

Ответ: а) да; б) нет; в) 63.

Список литературы

1. Бардушкин В.Н., Кожухов И.Б., Фадеичева Т.П. Основы теории делимости чисел. Решение уравнений в целых числах. Факультативный курс. – М.: МГИЭТ(ТУ), 2003.
2. ЕГЭ-17. Математика. Арифметика и алгебра. Задача 19 (профильный уровень)/ под ред. И.В. Ященко. – М.: МЦНМО, 2017.
3. Задачи по математике, режим доступа: www.problems.ru
4. Подготовка к ЕГЭ по математике. Новая демонстрационная версия 2014 года / И.В. Ященко, С.А. Шестаков, А.С. Трепалин, П.И. Захаров. – М.: МЦНМО, 2014.
5. Прокофьев А.А., Крянов А.Г. Последовательности чисел в задачах С6 ЕГЭ// Математика. Первое сентября. – 2015. - № 1. – с. 17-26.
6. Сайт информационной поддержки при подготовке к ЕГЭ, режим доступа: www.alexlarin.net